

全国高等教育自学考试公共基础课

工 程 数 学
(线性代数、概率论与数理统计)
自学考试大纲

(含考核目标)

全国高等教育自学考试指导委员会 制定
(2023 年审定)

大纲前言

为了适应社会主义现代化建设事业的需要,鼓励自学成才,我国在 20 世纪 80 年代初建立了高等教育自学考试制度.高等教育自学考试是个人自学、社会助学和国家考试相结合的一种高等教育形式.应考者通过规定的专业课程考试并经思想品德鉴定达到毕业要求的,可获得毕业证书;国家承认学历并按照规定享有与普通高等学校毕业生同等的有关待遇.经过 40 多年的发展,高等教育自学考试为国家培养造就了大批专门人才.

课程自学考试大纲是国家规范自学者学习范围、要求和考试标准的文件.它是按照专业考试计划的要求,具体指导个人自学、社会助学、国家考试、编写教材及自学辅导书的依据.

为更新教育观念,深化教学内容方式、考试制度、质量评价制度改革,更好地提高自学考试人才培养的质量,全国考委各专业委员会按照专业考试计划的要求,组织编写了课程自学考试大纲.

新编写的大纲,在层次上,专科参照一般普通高校专科或高职院校的水平,本科参照一般普通高校本科水平;在内容上,力图反映学科的发展变化以及自然科学和社会科学近年来研究的成果.

全国考委公共课课程指导委员会参照普通高等学校线性代数及概率论与数理统计等课程的教学基本要求,结合自学考试工科类专业的实际情况,组织制定的《工程数学(线性代数、概率论与数理统计)自学考试大纲》,经教育部批准,现颁发施行.各地教育部门、考试机构应认真贯彻执行.

全国高等教育自学考试指导委员会

2023 年 5 月

目 录

| | |
|-------------------------------|----|
| I. 课程性质与课程目标 | 1 |
| II. 考核目标 | 3 |
| III. 课程内容与考核要求 | 4 |
| 第 1 章 行列式与矩阵 | 4 |
| 第 2 章 向量 | 5 |
| 第 3 章 线性方程组 | 7 |
| 第 4 章 矩阵的相似对角化 | 7 |
| 第 5 章 实二次型 | 8 |
| 第 6 章 随机事件与概率 | 9 |
| 第 7 章 随机变量及其概率分布 | 10 |
| 第 8 章 随机变量的数字特征 | 11 |
| 第 9 章 大数定律及中心极限定理 | 12 |
| 第 10 章 样本与统计量 | 13 |
| 第 11 章 参数估计与假设检验 | 13 |
| IV. 关于大纲的说明与考核实施要求 | 15 |
| 工程数学(线性代数、概率论与数理统计)试题样卷 | 18 |
| 大纲后记 | 21 |

I. 课程性质与课程目标

一、课程的性质和特点

工程数学课程是高等教育自学考试工科类专业独立本科段考试计划中一门重要的基础理论课,它是为培养满足工科类专业高等本科人才的需要而设置的.本课程分为两部分,一是线性代数,二是概率论与数理统计.线性代数是研究有限维空间线性理论的一门学科,线性问题广泛存在于科学技术的各个领域,其处理方法又是许多非线性问题处理方法的基础.概率论与数理统计是研究随机现象统计规律性的一门学科,概率论从数量上研究随机现象的统计规律性,数理统计从应用角度研究处理随机性数据,建立有效的统计方法,并进行统计推断.

通过本课程的学习,使考生掌握工程数学的基本概念、基本理论和基本方法,并具备用线性代数和概率统计方法分析和解决实际问题的能力.本课程所介绍的方法广泛地应用于各个学科.

二、课程目标

本课程分为两部分:线性代数,概率论与数理统计.

线性代数包括行列式、矩阵、向量、线性方程组、矩阵的相似对角化和实二次型等内容.

线性代数部分的基本要求是:

1. 了解行列式的定义,掌握行列式的性质、展开定理与行列式的计算;
2. 了解矩阵的概念,掌握矩阵的运算及法则,会求逆矩阵;
3. 理解初等变换与初等矩阵的关系,掌握矩阵秩的概念与求法;
4. 理解向量组的线性相关与线性无关的概念,掌握向量组的极大线性无关组与秩的概念与求法;
5. 了解正交向量组的概念,掌握施密特正交化方法;
6. 理解齐次线性方程组有非零解的条件及非齐次线性方程组有解的条件;
7. 掌握齐次与非齐次线性方程组解的结构与通解的求法;
8. 掌握矩阵特征值与特征向量的概念、性质与求法;
9. 了解相似矩阵的概念与性质,掌握矩阵相似对角化的方法;
10. 掌握用正交变换化二次型为标准形的方法,会判断二次型(矩阵)是否为正定二次型(矩阵).

概率论与数理统计部分包括随机事件及其概率、随机变量及其概率分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、样本与统计量、参数估计与假设检验等内容.

概率论与数理统计部分的基本要求是:

1. 理解概率的概念与性质;
2. 掌握随机事件及其概率的性质与运算;
3. 掌握随机变量的概率分布的性质与计算;

I. 课程性质与课程目标

4. 掌握二维随机变量的概率分布的性质与计算;
5. 理解随机变量的数学期望与方差的性质和运算,掌握常用概率分布的数学期望与方差;
6. 了解协方差与相关系数的概念;
7. 了解大数定律与中心极限定理;
8. 了解数理统计的基本概念,理解常用统计量及其分布;
9. 掌握参数的点估计与区间估计的基本方法;
10. 掌握假设检验的基本步骤与基本方法.

三、与相关课程的联系

1. 与解析几何的联系

线性代数的某些内容与解析几何有着密切的联系,例如向量空间和几何空间、二次型与二次曲面的联系,向量组线性相关与线性无关、向量的内积、向量的长度、向量的正交等概念,都可以在几何空间中找到背景.

2. 与高等数学(微积分)的联系

高等数学(微积分)是学习概率论与数理统计的基础,例如连续性随机变量的分布、概率的计算会用到微积分中的极限、导数、积分、偏导数、重积分、无穷级数等知识.

3. 与有关后继课程的联系

工程数学是工科类有关专业自学考试计划中技术基础课与专业课的先修课程,它与后继课程有着十分密切的联系,在数学模型、数值计算以及与随机数学有关的后续课程中起着重要的作用. 因此,学好工程数学,奠定一定的数学基础,对以后的学习是十分必要的.

四、课程的重点和难点

本课程中线性代数部分的重点是行列式,矩阵,向量,线性方程组和矩阵的相似对角化.

本课程中概率论与数理统计部分的重点是概率的概念及相关性质,随机变量的概念及其概率分布,随机变量的数学期望和方差的概念及运算,样本与统计量的概念,正态总体的抽样分布,矩估计和极大似然估计,单个正态总体均值与方差的区间估计,单个正态总体均值与方差的双侧检验等.

本课程中线性代数部分的难点主要集中在第2章向量. 其中有关向量组线性相关或线性无关的概念和结论、向量组的极大线性无关组和向量组的秩、向量组的秩与矩阵的秩的关系等,都是初学者较难掌握的内容. 此外,行列式的计算、矩阵的初等变换与初等矩阵、矩阵可逆的几个充分必要条件、齐次线性方程组的基础解系、矩阵的特征值和特征向量的计算与性质、方阵的对角化、实二次型的正定性等,也都是初学者感到比较困难的地方.

本课程中概率论与数理统计部分的难点是古典概型的计算,全概率公式与贝叶斯公式,连续型随机变量的概率密度计算,随机变量函数的分布,边缘密度的计算,随机变量函数的数学期望,正态总体的抽样分布,极大似然估计,单个正态总体均值与方差的双侧检验等.

II. 考核目标

本大纲在考核目标中,按照识记、领会和应用三个层次规定其应达到的能力层次要求.三个能力层次是递升的关系,后者必须建立在前者的基础上.各能力层次的含义是:

识记(I):要求考生能够识别和记忆本课程中有关的数学概念和方法的主要内容(如定义、主要定理和推论、公式、性质、法则、基本计算方法和证明思路等),并能够根据考核的不同要求,做出正确的表述、选择和判断.

领会(II):要求考生能够理解本课程中有关数学概念(如定义、定理、公式、运算法则等)的内涵和外延,能够鉴别关于概念(如向量组线性相关或线性无关)的似是而非的说法;理解相关知识的区别和联系,并能够根据考核的不同要求对数学问题进行逻辑推理和论证,做出正确的判断、解释和说明.

应用(III):要求考生能够对本课程中的概念、定理、公式、性质、法则等,在熟悉和理解的基础上,综合多个知识点经过分析、计算或推导解决结构稍复杂的一些问题.

特别需要说明的是,试题的难易程度与能力层次有一定的联系,但二者不是等同的概念.在各个能力层次中对于不同的考生,都存在不同的难度(试题难度分为:易,较易,较难和难4个等级),希望考生不要将二者混淆.

III. 课程内容与考核要求

第 1 章 行列式与矩阵

一、学习目的与要求

学习本章,要求了解行列式定义;掌握行列式的计算方法,会计算 3、4 阶的数字行列式和简单的 n 阶行列式;会用克拉默法则求解三元线性方程组;了解矩阵的概念;掌握矩阵的各种运算及运算法则;理解方阵可逆的定义和可逆的几个充分必要条件,会求可逆矩阵的逆矩阵;了解初等矩阵和初等变换的关系;了解矩阵的秩的定义,会求矩阵的秩.

二、课程内容

1. 行列式的定义.
2. 行列式的性质.
3. 行列式按一行(或一列)展开.
4. 克拉默法则.
5. 矩阵的概念
6. 矩阵的运算.
7. 矩阵的分块.
8. 可逆矩阵.
9. 矩阵的初等变换与初等矩阵.
10. 矩阵的秩.

三、考核知识点与考核要求

1. 行列式的定义.
 - (1) 识记:元素的余子式,代数余子式和行列式的定义.
 - (2) 领会:上(下)三角形行列式的计算公式.
 - (3) 应用:用行列式定义计算结构特殊的行列式.
2. 行列式的性质.
 - (1) 领会:行列式的性质.
 - (2) 应用:利用行列式的性质计算行列式.
3. 行列式按一行(或一列)展开.
 - (1) 识记:3 阶范德蒙德行列式.
 - (2) 应用:利用行列式按一行(或一列)展开的方法计算行列式.
4. 克拉默法则.

(1) 识记: 克拉默法则.

(2) 应用: 利用克拉默法则求解三元线性方程组.

5. 矩阵的概念.

(1) 识记: 矩阵的定义; 上(下)三角形矩阵、对角矩阵、数量矩阵和单位矩阵、对称矩阵和反对称矩阵.

6. 矩阵的运算.

(1) 识记: 矩阵的加法、数乘、乘法和转置的定义.

(2) 领会: 矩阵的运算法则.

(3) 应用: 矩阵的各种运算及运算法则.

7. 矩阵的分块.

(1) 识记: 矩阵分块的概念.

(2) 领会: 分块矩阵的运算.

8. 可逆矩阵.

(1) 识记: 矩阵可逆的定义; 伴随矩阵 A^* 的定义以及相关性质.

(2) 领会: 可逆矩阵的性质; n 阶矩阵可逆的充分必要条件.

(3) 应用: 求可逆矩阵的逆矩阵; 求解矩阵方程.

9. 矩阵的初等变换与初等矩阵.

(1) 识记: 矩阵的初等变换的概念; 初等矩阵的定义和性质; 矩阵的等价标准形; 矩阵等价的充分必要条件.

(2) 领会: 初等变换和初等矩阵的关系.

(3) 应用: 用初等行变换法求可逆矩阵的逆矩阵.

10. 矩阵的秩.

(1) 识记: 矩阵的 k 阶子式; 矩阵秩的定义; 阶梯形矩阵的概念; 初等变换不改变矩阵的秩.

(2) 领会: 若 A 为 n 阶可逆矩阵, 对于 $n \times s$ 矩阵 B 和 $m \times n$ 矩阵 C , 有 $r(AB) = r(B)$; $r(CA) = r(C)$.

(3) 应用: 用初等变换求矩阵的秩.

四、本章重点和难点

重点: 行列式的性质和计算; 矩阵的运算及运算法则; 可逆矩阵的性质和计算; 矩阵的初等变换和初等矩阵的关系.

难点: n 阶行列式的计算; 矩阵的秩.

第 2 章 向 量

一、学习目的与要求

学习本章, 要求了解 n 维向量、向量的线性组合和线性表出的概念; 理解向量组线性相关或线性无关的概念, 会判断给定的向量组是否线性相关; 了解向量组的极大线性无关组与秩的

Ⅲ. 课程内容与考核要求

定义,会求向量组的极大线性无关组和秩;了解向量组的秩和矩阵的秩的关系;了解两个向量内积、两个向量正交的概念;掌握施密特正交化方法;了解正交矩阵的定义.

二、课程内容

1. n 维向量.
2. 向量间的线性关系.
3. 向量组的极大线性无关组.
4. 向量组的秩与矩阵的秩.
5. 向量的内积.

三、考核知识点与考核要求

1. n 维向量.

(1) 识记: n 维列向量与行向量;向量的线性运算; n 维向量空间的概念.

2. 向量间的线性关系.

(1) 识记:向量的线性组合与线性表出.

(2) 领会:向量组线性相关或线性无关的定义、充分条件、必要条件、几何意义.

(3) 应用:判断或证明向量组线性相关或线性无关;将给定的向量由向量组线性表出.

3. 向量组的极大线性无关组.

(1) 识记:两个向量组等价;向量组的极大线性无关组与向量组等价;向量组的两个极大线性无关组等价.

(2) 领会:向量组的极大线性无关组的定义及相关结论.

设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可由向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表出,以下结论都成立:

① 如果 $s > t$, 则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关.

② 如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 则 $s \leq t$.

③ 秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) \leq \text{秩 } r(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t)$.

(3) 应用:求给定向量组的一个极大线性无关组和秩,并将向量组中的其余向量由该极大线性无关组线性表出.

4. 向量组的秩与矩阵的秩.

(1) 识记:矩阵的行秩与列秩;矩阵的行秩(列秩)等于矩阵的秩;初等变换不改变矩阵的行秩和列秩.

(2) 应用:求向量组的秩或矩阵的秩.

5. 向量的内积.

(1) 识记:向量的内积及其性质;两个向量正交;向量的长度及其性质;单位向量和向量的单位化;正交向量组;正交矩阵的定义和性质.

(2) 应用:施密特正交化方法.

四、本章重点和难点

重点:向量组线性相关或线性无关;向量组的极大线性无关组与秩;施密特正交化方法.

难点:向量组线性相关或线性无关的判断与证明;向量组的极大线性无关组与秩.

第3章 线性方程组

一、学习目的与要求

学习本章,要求理解齐次线性方程组有非零解的充分必要条件,会判断齐次线性方程组是否有非零解;掌握齐次线性方程组的基础解系与通解的求法;理解非齐次线性方程组有解的充分必要条件,会判断非齐次线性方程组解的情况(无解、有唯一解、有无穷解);掌握非齐次线性方程组解的结构与通解的求法.

二、课程内容

1. 高斯消元法.
2. 齐次线性方程组.
3. 非齐次线性方程组.

三、考核知识点与考核要求

1. 高斯消元法.

(1) 识记:高斯消元法与矩阵初等变换.

2. 齐次线性方程组.

(1) 识记:齐次线性方程组解的性质.

(2) 领会:齐次线性方程组有非零解的充分必要条件.

(3) 应用:用初等行变换求齐次线性方程组的基础解系与通解.

3. 非齐次线性方程组.

(1) 领会:非齐次线性方程组有解的充分必要条件,非齐次线性方程组无解、有唯一解、有无穷解的判别.

(2) 应用:非齐次线性方程组解的结构与通解,用初等行变换求解非齐次线性方程组.

四、本章重点和难点

重点:线性方程组解的结构与求解.

难点:求解带参数的线性方程组.

第4章 矩阵的相似对角化

一、学习目的与要求

学习本章,要求了解矩阵特征值与特征向量的概念与性质、相似矩阵的概念与性质;会求矩阵的特征值与特征向量;掌握矩阵可相似对角化的条件,掌握将矩阵化为相似对角矩阵的方法;理解实对称矩阵的特征值与特征向量的性质;掌握用正交矩阵将实对称矩阵化为相似对角矩阵的方法.

二、课程内容

1. 特征值与特征向量.

Ⅲ. 课程内容与考核要求

2. 相似矩阵与矩阵对角化.
3. 实对称矩阵的对角化.

三、考核知识点与考核要求

1. 特征值与特征向量.
 - (1) 识记: 特征值与特征向量的概念.
 - (2) 领会: 特征值与特征向量的性质.
 - (3) 应用: 求矩阵的特征值与特征向量.
2. 相似矩阵与矩阵对角化.
 - (1) 识记: 矩阵相似的概念.
 - (2) 领会: 相似矩阵的性质.
 - (3) 应用: 矩阵可相似对角化的条件, 将矩阵化为相似对角矩阵.
3. 实对称矩阵的对角化.
 - (1) 领会: 实对称矩阵特征值与特征向量的性质.
 - (2) 应用: 用正交矩阵将实对称矩阵化为对角矩阵.

四、本章重点和难点

重点: 特征值与特征向量的性质, 将矩阵化为相似对角矩阵.

难点: 实对称矩阵的相似对角化.

第5章 实二次型

一、学习目的与要求

学习本章, 要求了解二次型的矩阵表示、秩、标准形与规范形的概念; 了解矩阵合同的概念与惯性定理; 了解正定二次型与正定矩阵的概念; 掌握用正交变换化二次型为标准形的方法; 会判断二次型(矩阵)是否为正定二次型(矩阵).

二、课程内容

1. 二次型及其矩阵表示.
2. 二次型的标准形.
3. 正定二次型与正定矩阵.

三、考核知识点与考核要求

1. 二次型及其矩阵表示.
 - (1) 识记: 二次型的概念.
 - (2) 领会: 二次型的矩阵与秩的概念.
 - (3) 应用: 求二次型的矩阵表示.
2. 二次型的标准形.
 - (1) 识记: 矩阵合同的概念.
 - (2) 领会: 二次型的标准形与规范形, 惯性定理.

(3) 应用:用正交变换化二次型为标准形.

3. 正定二次型与正定矩阵.

(1) 识记:正定二次型与正定矩阵的概念.

(2) 领会:二次型为正定二次型的充分必要条件.

(3) 应用:判断二次型(矩阵)是否为正定二次型(矩阵).

四、本章重点和难点

重点:用正交变换化二次型为标准形,判断二次型的正定性.

难点:用正交变换化二次型为标准形.

第6章 随机事件与概率

一、学习目的与要求

学习本章,要求理解随机事件的概念;掌握事件的关系与运算;理解概率的定义,掌握概率的基本性质,会用这些性质进行概率的基本运算;了解古典概型的定义,会计算简单的古典概型问题;了解条件概率的概念,掌握乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式;理解事件独立性的概念.

二、课程内容

1. 随机事件的关系及其运算.
2. 概率的定义与性质.
3. 古典概型.
4. 条件概率和乘法公式、全概率公式、贝叶斯公式.
5. 事件的独立性、伯努利概型.

三、考核知识点与考核要求

1. 随机事件的关系与运算.
 - (1) 识记:随机事件的概念及表示.
 - (2) 领会:事件的包含与相等、和事件、积事件、互不相容、对立事件的概念.
 - (3) 应用:和事件、积事件、对立事件的基本运算规律.
2. 概率的定义与性质.
 - (1) 识记:频率的定义和频率的基本性质.
 - (2) 领会:概率的定义.
 - (3) 应用:用概率性质进行计算.
3. 古典概型.
 - (1) 识记:古典概型的定义.
 - (2) 领会:计算简单的古典概型问题.
4. 条件概率和乘法公式、全概率公式、贝叶斯公式.
 - (1) 识记:条件概率的概念.
 - (2) 领会:乘法公式,用乘法公式进行计算.

Ⅲ. 课程内容与考核要求

(3) 应用:全概率公式与贝叶斯公式的计算.

5. 事件的独立性、伯努利概型.

(1) 识记:事件独立性的概念,伯努利概型的定义.

(2) 领会:用事件的独立性计算概率,伯努利概型的计算公式.

四、本章重点和难点

重点:随机事件的关系与运算,概率的性质;条件概率与乘法公式、全概率公式;事件独立性.

难点:古典概型的计算,全概率公式与贝叶斯公式;事件独立性.

第 7 章 随机变量及其概率分布

一、学习目的与要求

学习本章,要求理解随机变量及其分布函数的概念;理解离散型随机变量及其分布律的概念;掌握离散型随机变量的分布律的相关计算;掌握 0—1 分布、二项分布与泊松分布;理解连续型随机变量及其概率密度的概念,掌握分布函数、概率密度的性质及有关计算;掌握均匀分布、指数分布;掌握正态分布及其概率计算;了解随机变量的函数概念,会求简单随机变量函数的概率分布;了解二维离散型随机变量的分布律及其性质;了解二维连续型随机变量的概率密度及其性质;了解边缘分布律、边缘概率密度的概念;掌握边缘分布律、边缘概率密度的求法;了解随机变量独立性的概念;了解两个独立随机变量之和的分布并掌握其求法.

二、课程内容

1. 随机变量的概念.
2. 分布函数的概念和性质.
3. 离散型随机变量.
4. 连续型随机变量.
5. 随机变量函数的分布.
6. 二维随机变量的概念.
7. 二维离散型随机变量的分布律和边缘分布律.
8. 二维连续型随机变量的概率密度和边缘概率密度.
9. 随机变量的独立性.
10. 两个独立随机变量之和的分布.

三、考核知识点与考核要求

1. 随机变量.
 - (1) 识记:随机变量的概念及其分类.
2. 随机变量的分布函数.
 - (2) 领会:随机变量分布函数的定义和性质.
3. 离散型随机变量及其分布.
 - (1) 领会:离散型随机变量及其分布律的概念与性质.
 - (2) 应用:0—1 分布、二项分布和泊松分布的分布律.

4. 连续型随机变量及其概率密度.

(1) 领会:连续型随机变量及其概率密度的定义,概率密度的性质、概率密度与分布函数的关系.

(2) 应用:均匀分布、指数分布、正态分布的定义及相关计算.

5. 随机变量函数的分布.

(1) 应用:离散型随机变量的函数的分布律,连续型随机变量的简单函数的概率密度.

6. 多维随机变量及其分布率.

(1) 识记:二维随机变量及其分布函数的概念,分布函数的基本性质,二维均匀分布、二维正态分布的定义.

(2) 领会:二维离散型随机变量的分布律的定义及其性质,二维连续型随机变量的概率密度的定义及其性质.

(3) 应用:用分布律和概率密度求给定事件的概率.

7. 边缘分布.

(1) 识记:二维正态分布的边缘分布.

(2) 领会:二维离散型随机变量的边缘分布律、二维连续型随机变量的边缘概率密度.

8. 随机变量的独立性.

(1) 识记:随机变量独立性的定义.

(2) 领会:判断两个离散型随机变量的独立性,判断两个连续型随机变量的独立性.

9. 两个随机变量之和的分布.

(1) 识记:两个独立随机变量之和的概率密度.

四、本章重点和难点

重点:离散型随机变量及其分布律;连续型随机变量及其概率密度;二项分布,正态分布;二维离散型随机变量的分布律及边缘分布律,二维连续型随机变量的概率密度及边缘密度.

难点:分布函数的概念;连续型随机变量的概率密度计算;随机变量函数的分布;边缘密度的计算,两个独立随机变量之和的概率密度.

第 8 章 随机变量的数字特征

一、学习目的与要求

学习本章,要求了解数学期望与方差的概念,了解数学期望与方差的性质并掌握其计算;会计算随机变量函数的数学期望;掌握 0—1 分布、二项分布、泊松分布、均匀分布、指数分布和正态分布的数学期望与方差;了解协方差与相关系数的概念、性质并掌握其计算;了解矩的概念并掌握其求法.

二、课程内容

1. 数学期望的概念及性质.

2. 方差的概念及性质.

3. 几种常用分布的数学期望与方差.

Ⅲ. 课程内容与考核要求

4. 协方差与相关系数.

5. 矩.

三、考核知识点与考核要求

1. 随机变量的数学期望.

(1) 识记:数学期望的定义.

(2) 领会:数学期望的基本性质.

(3) 应用:数学期望的计算,随机变量函数的数学期望的计算.

2. 随机变量的方差.

(1) 领会:方差的基本性质.

(2) 应用:方差、标准差的定义及计算.

3. 几种常用分布的数学期望和方差.

(1) 应用:0-1 分布、二项分布、泊松分布的数学期望和方差,均匀分布、指数分布、正态分布的数学期望和方差.

4. 协方差及相关系数.

(1) 识记:协方差和相关系数的定义及其性质,二维正态分布的相关系数的性质.

(2) 领会:求协方差、相关系数.

5. 矩.

(1) 识记:原点矩、中心矩、混合原点矩、混合中心矩的概念.

四、本章重点和难点

重点:数学期望和方差的概念、性质及计算,随机变量函数的数学期望.

难点:随机变量函数的数学期望.

第 9 章 大数定律及中心极限定理

一、学习目的与要求

学习本章,要求了解切比雪夫不等式、切比雪夫大数定律、伯努利大数定律,了解独立同分布的中心极限定理与棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理.

二、课程内容

1. 大数定律.

2. 中心极限定理.

三、考核知识点与考核要求

1. 大数定律.

(1) 识记:切比雪夫不等式、切比雪夫大数定律、伯努利大数定律

2. 中心极限定理.

(1) 应用:独立同分布的中心极限定理,棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理.

四、本章重点和难点

重点:独立同分布序列的中心极限定理.

难点:中心极限定理的简单应用.

第 10 章 样本与统计量

一、学习目的与要求

学习本章,要求了解总体、样本的概念;了解总体分布与样本分布的概念;了解统计量的概念;掌握样本均值、样本方差和样本矩的公式;知道 χ^2 分布、 t 分布、 F 分布的定义及性质,了解分位数的概念;掌握正态总体的抽样分布.

二、课程内容

1. 总体、简单随机样本.
2. 统计量.
3. χ^2 分布, t 分布, F 分布.
4. 正态总体的抽样分布.

三、考核知识点与考核要求

1. 总体与样本.
(1) 识记:总体简单随机样本的概念,总体分布与样本分布的概念.
2. 统计量.
(1) 识记:统计量的概念.
(2) 领会:样本均值、样本方差,样本矩.
3. 几种常用统计量的分布.
(1) 领会: χ^2 分布、 t 分布、 F 分布的定义及性质,分位数的概念.
4. 正态总体的抽样分布.
(1) 应用:正态总体的抽样分布.

四、本章重点和难点

重点:简单随机样本,统计量,正态总体的抽样分布

难点:正态总体的抽样分布

第 11 章 参数估计与假设检验

一、学习目的与要求

学习本章,要求了解参数的点估计、估计量与估计值的概念;掌握矩估计、极大似然估计的方法;理解估计量的无偏性的概念,了解有效性、相合性的概念;了解置信区间的概念,会求单个正态总体均值和方差的置信区间.了解假设检验的基本思想,掌握假设检验的基本步骤;掌握单个正态总体的均值与方差的假设检验.

二、课程内容

1. 点估计.

Ⅲ. 课程内容与考核要求

2. 矩估计法,极大似然估计法.
3. 单个正态总体均值和方差的区间估计法.
4. 假设检验的基本思想与步骤.
5. 单个正态总体的假设检验.

三、考核知识点与考核要求

1. 点估计.
 - (1) 识记:参数的点估计、估计量与估计值的概念.
 - (2) 应用:矩估计法和极大似然估计法.
2. 估计量的评价标准.
 - (1) 识记:估计量的有效性、相合性.
 - (2) 领会:估计量的无偏性.
3. 区间估计.
 - (1) 领会:置信区间的概念.
 - (2) 应用:求单个正态总体均值和方差的置信区间.
4. 假设检验的基本思想与步骤.
 - (1) 识记:假设检验的基本思想和假设检验的两类错误.
 - (2) 领会:假设检验的基本步骤.
5. 正态总体的假设检验.
 - (1) 应用:对单个正态总体的均值和方差进行双侧检验.

四、本章重点和难点

重点:矩估计和极大似然估计,单个正态总体均值与方差的区间估计,单个正态总体均值与方差的双侧检验.

难点:极大似然估计,单个正态总体均值与方差的双侧检验.

IV. 关于大纲的说明与考核实施要求

一、自学考试的目的和作用

课程自学考试大纲是根据专业自学考试计划的要求,结合自学考试的特点而确定的。其目的是对个人自学、社会助学和课程考试命题进行指导和规定。

课程自学考试大纲明确了课程学习的内容及深度,规定了课程自学考试的范围和标准。因此,它是编写自学考试教材和辅导书的依据,是社会助学组织进行自学辅导的依据,是自学者学习教材、掌握课程内容知识范围和程度的依据,也是进行自学考试命题的依据。

二、课程自学考试大纲与教材的关系

课程自学考试大纲是进行学习和考核的依据,教材是学习掌握课程知识的基本内容与范围,教材的内容是大纲所规定的课程知识和内容的扩展与发挥。教材与大纲所体现的课程内容应基本一致,大纲里面的课程内容和考核知识点,教材里要有,反过来教材里有的内容,大纲里就不一定体现。(注:如果教材是推荐选用的,其中有与大纲不一致的内容,应以大纲规定为准。)

三、关于自学教材

《线性代数(工)(2023年版)》,全国高等教育自学考试指导委员会组编,申亚男、卢刚主编,北京大学出版社。

《概率论与数理统计(工)(2023年版)》,全国高等教育自学考试指导委员会组编,孙洪祥、张志刚主编,北京大学出版社。

四、关于自学要求和自学方法的指导

本大纲的课程基本要求是依据专业考试计划和专业培养目标而确定的。课程基本要求还明确了课程的基本内容,以及对基本内容掌握的程度。基本要求中的知识点构成了课程内容的主体部分。因此,课程基本内容掌握程度、课程考核知识点是高等教育自学考试考核的主要内容。

为有效地指导个人自学和社会助学,本大纲已指明了课程的重点和难点,在各章节的基本要求中也指明了章节内容的重点和难点。

下面给出几点具体的学习建议,供考生参考。

1. 了解要求。在每章内容学习之前,先了解一下大纲中关于本章考核知识点、各知识点的考核要求、重点与难点等内容,以便学习时做到心中有数,有的放矢。

2. 重视基础。理解基本概念与基本理论,掌握基本方法。工程数学中的一些概念和相关结论比较抽象,不易理解和掌握,这就要求考生对定义或定理的文字要逐字仔细阅读,并结合相应的例题进行思考和理解。在自学过程中,注意通过例题学习常用的解题思路,掌握基本解题方法。

IV. 关于大纲的说明与考核实施要求

3. 加强练习. 做一定数量的习题(在这个过程中能发现学习中存在的问题)是掌握基本解题方法的重要环节. 要重视作业中发现的问题并及时解决这些问题, 不要让问题积累起来以致影响后面内容的学习. 做题时做到步骤清楚、运算准确、书写及使用数学语言规范、并得出最后结果.

4. 及时复习. 在每章内容学习结束时, 要归纳和整理一下本章的基本概念, 主要结论以及它们之间的联系, 对整章内容有一个整体的了解和把握. 同时也应注意与前面各章相关内容的联系, 可以通过一些综合题的练习, 理解并逐步掌握相关知识的综合运用方法.

5. 关于自学时间的安排.

本课程共 6 学分, 建议自学时间安排如下:

| 章次 | 课程内容 | 学时 |
|----|-------------|-------|
| 1 | 行列式与矩阵 | 46 54 |
| 2 | 向量 | 26 30 |
| 3 | 线性方程组 | 12 16 |
| 4 | 矩阵的相似对角化 | 20 24 |
| 5 | 实二次型 | 16 20 |
| 6 | 随机事件与概率 | 24 28 |
| 7 | 随机变量及其概率分布 | 46 54 |
| 8 | 随机变量的数字特征 | 24 30 |
| 9 | 大数定律与中心极限定理 | 6 10 |
| 10 | 样本与统计量 | 8 12 |
| 11 | 参数估计与假设检验 | 36 42 |

五、对社会助学的要求

1. 了解考试大纲对本课程的总体要求和各章的知识点.
2. 理解各知识点要求达到的认知层次和考核要求.
3. 辅导时应以考试大纲为依据、以指定教材为基础, 不要随意增删内容和提高或降低要求.
4. 辅导时应对学习方法进行指导, 提倡“认真阅读教材, 刻苦钻研教材, 主动争取帮助, 依靠自己学通”的学习方法.
5. 辅导时要注重基础, 在全面学习的基础上, 突出重点, 以主带次. 对考生提出的问题, 要积极启发引导, 重在揭示数学概念的本质、基本原理和方法, 以及各章节内容之间的联系.
6. 注意对考生能力的培养, 特别是自学能力的培养. 要引导考生逐步独立学习, 学会提出问题、分析问题、判断问题和解决问题.

六、对考核内容的说明

本课程要求考生学习和掌握的知识点内容都作为考核的内容. 课程中各章的内容均由若干个知识点组成, 在自学考试中成为考核的知识点. 因此, 课程自学考试大纲中所规定的考试内容是以分解为考核知识点的方式给出的. 由于各知识点在课程中的地位、作用以及知识自

身的特点不同,自学考试对各知识点分别按三个认知(或叫能力)层次确定其考核要求.

七、关于考试命题的若干规定

1. 考试的方法为闭卷、笔试. 考试时间为 150 分钟. 试题份量以中等水平的考生在规定的时间内能答完全部试题为度. 评分采用百分制,60 分为及格.

2. 本大纲各章规定的基本要求、知识点以及知识点下的知识细目,都属于考核的内容. 考试命题既要覆盖到章,又要避免面面俱到. 要突出课程的重点、章节的重点.

3. 命题不应有超出大纲中考核知识点范围的题目,考核要求不得高于大纲中所规定的相应的最高能力层次要求. 命题应着重考核自学者对基本概念、基本知识、基本方法和基本理论的了解与掌握. 不出偏题或怪题.

4. 本课程在试卷中对不同能力层次要求的分数比例大致为:识记占 30%,领会占 40%,应用占 30%.

5. 要合理安排试题的难易程度. 试题的难度可分为:易、较易、较难和难 4 个等级. 每份试卷中这 4 个等级试题分数的比例一般为:2:4:3:1.

6. 课程考试命题的题型有:单项选择题、填空题、计算题和证明题等四种.

7. 线性代数和概率论与数理统计内容试题分别是 50 分和 50 分.

8. 本课程的考试适用于高等教育自学考试工科各专业本科的学生.

9. 生在考试时只允许带签字笔、铅笔、三角板、橡皮和没有存储功能的计算器.

工程数学(线性代数、概率论与数理统计)

试题样卷

试卷说明 E 表示单位矩阵, A^T 表示矩阵 A 的转置矩阵, $r(A)$ 表示矩阵 A 的秩; 对于 n 阶矩阵 A , A^* 表示 A 的伴随矩阵, $|A|$ 表示 A 的行列式.

一、单项选择题: 本大题共 8 小题, 每小题 2 分, 共 16 分.

1. 设 A 是 3 阶矩阵, 且 $|A| = -1$, 则 $|2A| =$ _____.

- A. -8 B. -2 C. 2 D. 8

2. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, 则 $A^{-1} =$ _____.

- A. $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$
- C. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

3. 若齐次线性方程组 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & t \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 的基础解系含有两个解向量, 则 $t =$ _____.

- A. 2 B. 4 C. 6 D. 8

4. 设 3 阶矩阵 A 的三个特征值是 1, 0, -2, 相应的特征向量依次为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, 令

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $P^{-1}AP =$ _____.

- A. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

5. 掷一颗骰子, 观察出现的点数. A 表示“出现 2 点”, B 表示“出现奇数点”, 则_____.

- A. $A \subset B$ B. $A \subset \bar{B}$ C. $B \subset A$ D. $\bar{A} \subset B$

6. 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y) = \begin{cases} c, & -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$ 则常数 c

=_____.

A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{1}{2}$

C. 2

D. 4

7. 设 (X, Y) 为二维随机变量, 则与 $\text{Cov}(X, Y) = 0$ 不等价的是_____.

A. X 与 Y 相互独立

B. $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$

C. $D(X-Y) = D(X) + D(Y)$

D. $E(XY) = E(X)E(Y)$

8. 设总体 X 的方差为 σ^2 , X_1, X_2, \dots, X_n 为来自 X 的样本, \bar{X} 为样本均值, 则参数 σ^2 的无偏估计为_____.

A. $\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n X_i^2$

B. $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$

C. $\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$

D. $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$

二、填空题: 本大题共 10 小题, 每小题 2 分, 共 20 分.

9. 设 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, A_{ij} 表示 D 中 (i, j) 元素 $(i, j = 1, 2, 3, 4)$ 的代数余子式, 则 A_{21}

$+A_{22} + A_{23} + A_{24} =$ _____.

10. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} =$ _____.

11. 若 A, B 均为 3 阶矩阵, 且 $|A| = 2, B = -3E$, 则 $|AB| =$ _____.

12. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix}$, 其中 $a_i b_i \neq 0, (i = 1, 2, 3)$, 则 $r(A) =$ _____.

13. 设 A 为 n 阶矩阵, 如果行列式 $|5E - A| = 0$, 则 A 必有一个特征值为_____.

14. 设 A, B 为随机事件, $P(A) = \frac{1}{2}, P(B|A) = \frac{1}{3}$, 则 $P(AB) =$ _____.

15. 设随机变量 X 的分布律为

| | | | |
|-----|---------------|---------------|---------------|
| X | -1 | 0 | 2 |
| P | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ |

, $F(x)$ 是 X 的分布函数, 则 $F(1) =$ _____.

16. 设随机变量 X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立且同分布, 它们的数学期望为 μ , 方差为 σ^2 , 令 $Z_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, 则对任意正数 ϵ , 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|Z_n - \mu| \geq \epsilon\} =$ _____.

17. 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, X_1, X_2, \dots, X_n 为来自 X 的样本, S^2 为样本方差, 且 $\frac{cS^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$, 则常数 $c =$ _____.

18. 设总体 $X \sim N(\mu, 1)$, μ 未知, X_1, X_2, \dots, X_n 为来自 X 的样本, \bar{X} 为样本均值, 则 μ

的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间是_____.

三、计算题:本大题共 7 小题,每小题 8 分,共 56 分.

19. 求下列向量组的秩和一个极大线性无关组:

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$20. \text{ 确定 } \lambda, \mu \text{ 的值,使线性方程组 } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_2 + 2x_3 = 3, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = \mu \end{cases} \text{ 有解.}$$

21. 用正交变换化二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 6x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$ 为标准形,并写出所用的正交变换.

$$22. \text{ 设二维随机变量 } (X, Y) \text{ 的概率密度为 } f(x, y) = \begin{cases} 6x^2y, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求:(1) (X, Y) 关于 X 的边缘概率密度 $f_X(x)$; (2) $P\{X > Y\}$.

23. 设随机变量 $X \sim N(0, 1)$, 记 $Y = 2X$. 求:(1) $P\{X < -1\}$; (2) $P\{|X| < 1\}$; (3) Y 的概率密度. (附: $\Phi(1) = 0.8413$)

24. 设随机变量 X 的分布律为

| | | | |
|-----|---------------|---------------|---------------|
| X | -1 | 0 | 1 |
| P | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ |

记 $Y = X^2$. 求:(1) $D(X), D(Y)$; (2) ρ_{XY} .

$$25. \text{ 设总体 } X \text{ 的概率密度为 } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \text{ 其中未知参数 } \theta > 0, X_1, X_2, \dots, X_n$$

为来自 X 的样本. 求 θ 的极大似然估计.

四、证明题:本题 8 分.

26. 设 ξ_1, ξ_2, ξ_3 是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系. 证明: $\xi_1, \xi_1 + \xi_2, \xi_2 + \xi_3$ 也是 $Ax = 0$ 的一个基础解系.

大纲后记

《工程数学(线性代数、概率论与数理统计)自学考试大纲》是根据《高等教育自学考试专业基本规范(2021年)》的要求,由全国高等教育自学考试指导委员会公共课课程指导委员会组织制定的。

全国考委公共课课程指导委员会对本大纲组织审稿,根据审稿会意见由编者做了修改,最后由公共课课程指导委员会定稿。

本大纲由北京科技大学申亚男教授担任主编,北京科技大学张志刚参加编写;参加审稿并提出修改意见的有清华大学扈志明教授和白峰杉教授。

对参与本大纲编写和审稿的各位专家表示感谢。

全国高等教育自学考试指导委员会

公共课课程指导委员会

2023年6月