湖南省高等教育自学考试

课 程 考 试 大 纲

实变函数与泛函分析

（课程代码：**02021**）

湖南省教育考试院组编

2016 年 **12** 月

高等教育自学考试课程考试大纲

课程名称：实变函数与泛函分析　　　　　　　　　　　　　　课程代码：02021

第一部分　课程性质与目标

一、课程性质与特点

实变函数与泛函分析是高等教育自学考试数学（本科）专业的选考课程。该课程在点集论的基础上讨论分析数学中一些最基本的概念和性质，其主要内容是引入 Lebesgue 积分并克服了 Riemann 积分的不足。它是数学分析的继续、深化和推广，是一门培养考生数学素质的重要课程，也是现代数学的基础。泛函分析是现代数学中一个重要的分支，它把具体的分析问题抽象到一种更加纯粹的代数拓扑结构的形式中，综合运用了分析、代数与几何的观点和方法进行研究，其理论与方法具有高度概括性和广泛应用性的特点。

二、课程目标与基本要求

通过本课程的学习主要使考生在了解黎曼积分局限性的基础上理解和掌握实变函数的基本理论和研究方法，系统掌握 Lebesgue 测度理论和 Lebesgue 积分理论，拓展考生的思维和视野，并以此进一步培养和提高考生的逻辑推理、分析论证、演绎归纳等抽象思维能力，为进一步钻研现代数学理论打下基础。

三、与本专业其他课程的关系

实变函数与泛函分析的 Lebesgue 积分理论是数学分析黎曼积分的推广，赋范线性空间与内积空间又是高等代数线性空间理论的推广。先修课程为高等代数和数学分析。

第二部分　考核内容与考核目标

第一章　集合与 $\mathbf{R}^n$ 中的点集

一、学习目的与要求

通过本章学习，要求考生理解与掌握的基本内容：集的运算及其运算规律，映射以及与映射有关的一些概念。集的等势，可数集概念及其基本性质，实数集的不可数性。

本章介绍实变函数论必需的直线上的点集的概念和知识。包括度量空间、n 维欧氏空间，聚点、内点、界点，开集、闭集、完备集，直线上的开集、闭集及完备集的构造。要求掌握直线上的开集与闭集，内点，聚点，导集，闭包，完备集等概念，理解开集的构造定理及 Cantor 三分集的完备性，稀疏性。理解 Bernstein 定理，了解序集概念以及 Zorn 引理，Zermelo 选择公理。

二、考核知识点与考核目标

（一）集合与集合的运算（重点）

识记：交集、并集、差集、补集的概念

理解：集合的运算律及简单运算性质，De Morgen 公式，集列极限的概念

应用：集合的包含、相等定义，集列极限的集合表示

（二）$\mathbf{R}^n$ 中的点集（次重点）

识记：聚点、内点和界点的概念，构成区间的概念

理解：开集、闭集和完备集的概念和性质

应用：直线上的开集、闭集和完备集的构造，Cantor 集的构成

（三）可列集与基数（一般）

识记：可数集和不可数集合的概念，对等和基数的概念

理解：可数集与不可数集的性质，连续基数

应用：Bernstein 定理

第二章　Lebesgue 测度

一、学习目的与要求

通过本章学习，要求考生掌握直线上的开集与闭集的测度以及直线上有界集的内外测度以及 Lebesgue 测度以及可测集的概念，理解可测集对可列并，及余的封闭性，理解 Lebesgue 测度的完全可加性以及可测集的 Caratheodory 条件。

二、考核知识点与考核目标

（一）可测集与测度（重点）

识记：Lebesgue 可测集的概念

理解：可测集的 Caratheodory 条件，可测集的基本性质，可测集的逼近性质，测度的平移不变性

应用：Lebesgue 测度的完全可加性等性质

（二）外侧度（一般）

识记：外侧度的概念

理解：外测度的次可加性

第三章　可测函数

一、学习目的与要求

通过本章学习，要求考生了解可测度函数类并讨论它的性质，为后面学习 Lebesgue 积分做准备。理解可测函数的基本性质，可测函数的几个等价条件，几乎处处的概念，可测函数的上、下确界函数的可测性，可测函数的上、下极限函数及极限函数的可测性。可测函数可以用简单函数来逼近，两个可测函数的和、差、积、商的可测性；集列的上、下限集及极限集，叶果洛夫定理可测函数列测度收敛与几乎处处收敛之间的关系，Riesy 定理。

二、考核知识点与考核目标

（一）可测函数（重点）

识记：可测函数的概念，几乎处处成立的含义

理解：可测函数的等价条件，可测函数的简单逼近，几种收敛的概念

应用：几种收敛的相互关系

（二）可测函数与连续函数的关系（次重点）

理解：Lusin 定理

第四章　Lebesgue 积分

一、学习目的与要求

通过本章学习，要求考生了解黎曼可积的充要条件是被积函数几乎处处连续。理解勒贝格积分的定义及其建立过程。理解 Riemann 积分与 Lebesgue 积分的关系。理解 Lebesgue 积分的性质，掌握 Lebesgue 积分的绝对可积性和绝对连续性。掌握勒贝格控制收敛定理、列维定理、逐项积分定理、积分的可数可加性定理。了解富比尼定理。

二、考核知识点与考核目标

（一）可积函数及其性质（次重点）

识记：可积函数的概念

理解：Lebesgue 积分的概念，积分的初等性质

应用：Lebesgue 积分与 Riemann 积分的关系

（二）积分的极限定理（重点）

理解：Levi 定理及其推论

应用：控制收敛定理及其推论

（三）Fubini 定理（一般）

识记：直积的概念

理解：直积的的测度，Fubini 定理

应用：积分次序交换定理

第五章　微分与不定积分

一、学习目的与要求

通过本章学习，要求考生理解可微的概念，了解有界变差函数和绝对连续函数的概念，掌握不定积分、有界变差函数、绝对连续函数的性质。

二、考核知识点与考核目标

（一）有界变差函数（重点）

识记：有界变差函数的概念，全变差的概念

理解：全变差的求法，有界变差函数的性质，Jordan 分解定理及其推论

（二）绝对连续函数与不定积分（次重点）

识记：绝对连续函数的概念

理解：不定积分的性质，绝对连续函数的性质，牛顿莱布尼茨公式

（三）单调可测函数的可微性（一般）

理解：Lebesgue 定理，Fubini 定理

第六章　广义测度

本章内容不作考核。

第七章　Lp 空间两章

本章内容不作考核。

第三部分　有关说明与实施要求

一、考核的能力层次表述

本大纲在考核目标中，按照“识记”、“理解”、“应用”三个能力层次规定其应达到的能力层次要求。各能力层次为递进等级关系，后者必须建立在前者的基础上，其含义是：

识记：能知道有关的名词、概念、知识的含义，并能正确认识和表述，是低层次的要求。

理解：在识记的基础上，能全面把握基本概念、基本原理、基本方法，能掌握有关概念、原理、方法的区别与联系，是较高层次的要求。

应用：在理解的基础上，能运用基本概念、基本原理、基本方法联系学过的多个知识点分析和解决有关的理论问题和实际问题，是最高层次的要求。

二、教材

指定教材：实变函数论，侯友良，武汉大学出版社，2008 年第 1 版

三、自学方法指导

1. 在开始阅读指定教材某一章之前，先翻阅大纲中有关这一章的考核知识点及对知识点的能力层次要求和考核目标，以便在阅读教材时做到心中有数，有的放矢。
2. 阅读教材时，要逐段细读，逐句推敲，集中精力，吃透每一个知识点，对基本概念必须深刻理解，对基本理论必须彻底弄清，对基本方法必须牢固掌握。
3. 在自学过程中，既要思考问题，也要做好阅读笔记，把教材中的基本概念、原理、方法等加以整理，这可从中加深对问题的认知、理解和记忆，以利于突出重点，并涵盖整个内容，可以不断提高自学能力。
4. 完成书后作业和适当的辅导练习是理解、消化和巩固所学知识，培养分析问题、解决问题及提高能力的重要环节，在做练习之前，应认真阅读教材，按考核目标所要求的不同层次，掌握教材内容，在练习过程中对所学知识进行合理的回顾与发挥，注重理论联系实际和具体问题具体分析，解题时应注意培养逻辑性，针对问题围绕相关知识点进行层次（步骤）分明的论述或推导，明确各层次（步骤）间的逻辑关系。

四、对社会助学的要求

1．应熟知考试大纲对课程提出的总要求和各章的知识点。
2．应掌握各知识点要求达到的能力层次，并深刻理解对各知识点的考核目标。
3．辅导时，应以考试大纲为依据，指定的教材为基础，不要随意增删内容，以免与大纲脱节。
4．辅导时，应对学习方法进行指导，宜提倡“认真阅读教材，刻苦钻研教材，主动争取帮助，依靠自己学通”的方法。
5．辅导时，要注意突出重点，对考生提出的问题，不要有问即答，要积极启发引导。
6．注意对考生能力的培养，特别是自学能力的培养，要引导考生逐步学会独立学习，在自学过程中善于提出问题，分析问题，做出判断，解决问题。
7．要使考生了解试题的难易与能力层次高低两者不完全是一回事，在各个能力层次中会存在着不同难度的试题。
8．助学学时：本课程共 8 学分，建议总课时 144 学时，其中助学课时分配如下：

章　次	内　容	学　时
第一章	集合与R^n中的点集	32
第二章	Lebesgue 测度	32
第三章	可测函数	32
第四章	Lebesgue 积分	32
第五章	微分与不定积分	16
合　　计		144

五、关于命题考试的若干规定

1．本大纲各章所提到的内容和考核目标都是考试内容。试题覆盖到章，适当突出重点。
2．试卷中对不同能力层次的试题比例大致是：“识记”为 30%、“理解”为 50%、“应用”为 20%。
3．试题难易程度应合理：易、较易、较难、难比例为 2：3：3：2。
4．每份试卷中，各类考核点所占比例约为：重点占 60%，次重点占 30%，一般占 10%。
5．试题类型一般分为：单项选择题、填空题、计算题、证明题。
6．考试采用闭卷笔试，考试时间 150 分钟，采用百分制评分，60 分合格。

六、题型示例（样题）

一、单项选择题（本大题共■小题，每小题■分，共■分）

在每小题列出的四个备选项中只有一个是符合题目要求的，请将其选出并将“答题卡”上的相应字母涂黑。错涂、多涂或未涂均无分。

1．任意多个 F_σ 集的并集是

A．开集　　B．闭集　　C．F_σ 集　　D．G_δ 集

二、填空题（本大题共■小题，每小题■分，共■分）

1．设 $A_n=[-2,\ \frac{1}{n}-1]$，$i=1,2,3,\cdots$，则 $\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n=$______。

三、计算题（本大题共■小题，每小题■分，共■分）

1．计算 $\int_{[0,1)}\ln(1-x)\mathrm{d}x$。

四、证明题（本大题共■小题，每小题■分，共■分）

1．试证明：自然数集与无理数集不对等。