

湖南省高等教育自学考试

课程考试大纲

抽象代数

(课程代码: 02009)

湖南省教育考试院组编
2016 年 12 月

高等教育自学考试课程考试大纲

课程名称：抽象代数

课程代码：02009

第一部分 课程性质与目标

一、课程性质与特点

抽象代数是高等教育自学考试数学（本科）专业的专业核心课程，它为现代数学、现代物理学、计算机科学、现代通信以及密码学等提供了语言、重要结论和研究方法。该课程主要讲授群、环、域的基本理论和初步知识，培养考生的抽象思维和逻辑推理的能力。其理论也已应用到自然科学技术的许多方面，已成为物理、通信、系统工程、计算机科学等领域的研究人员的基本工具。

二、课程目标与基本要求

该课程的目的在于使考生初步掌握基本的抽象代数知识和抽象、严格的代数方法，培养考生的抽象思维和逻辑推理的能力；进一步理解具体与抽象、特殊与一般等辩证关系。锻炼考生认识问题和研究问题的能力，提高考生的数学素质。

考生在理解抽象的代数结构时，应从熟悉的常见例子出发来理解抽象的代数结构（如从整数集合、剩余类集合、一个非空集合上的所有可逆变换来引出群的概念；从整数集合、剩余类集合、域上的多项式集合、域上的方阵集合等来引出环、域的概念等。

三、与本专业其他课程的关系

抽象代数是代数学的入门课程，它与数学专业的其他课程如初等数论、离散数学等有很密切的联系。

第一部分 考核内容与考核目标

第一章 基本概念

一、学习目的与要求

本章介绍本课程及其他数学分支的基础支撑，内容有集合、映射的概念，代数运算及各种运算律，同态、同构的概念与性质以及等价关系。通过本章的教学要求考生对本课程的性质、内容和方法有一个初步的了解。

二、考核知识点与考核目标

（一）代数运算、同态、同构映射、等价关系、商集（重点）

识记：1. 代数运算的定义

2. 同态映射

3. 同构映射

4. 等价关系

理解：1. 代数运算定律

- 2. 同余关系
- 3. 等价关系的性质
- 应用：1. 代数运算的运算律判定规则
- 2. 等价关系的判定规则
- 3. 同态与同构的判定规则
- 4. 同余类判定规则
- 5. 剩余类的基本特性
- (二) 集合、映射、变换（次重点）。
 - 识记：1. 集合的定义
 - 2. 映射的定义
 - 3. 变换的定义
 - 理解：1. 集合运算
 - 2. 单射、满射、一一映射
 - 应用：1. 集合的基本计算
 - 2. 单射、满射、一一映射判定
- (三) 同态满射、自同构（一般）
 - 识记：1. 同态满射
 - 2. 自同构
 - 理解：1. 同态满射的基本性质
 - 2. 自同构的基本性质
 - 应用：同态满射、同构的判定

第二章 群论

一、学习目的与要求

通过本章的学习，了解群的定义和性质、子群及其判定条件、子群的陪集、商群及同态基本定理等内容，掌握群论的基本知识和研究群的基本方法，进而让考生了解处理抽象的代数结构的基本方法，并为后继各章的学习作好准备。

二、考核知识点与考核目标

(一) 群、子群、循环群、置换群、陪集、商群（重点）

- 识记：1. 群的定义
- 2. 变换群定义
- 3. 置换群
- 4. 循环群
- 5. 子群
- 6. 陪集
- 7. 商群
- 理解：1. 群的基本性质和相关概念
- 2. 变换群的相关定理

3. 置换群的相关定理
4. 循环群的相关定理
5. 子群相关定理
6. 陪集相关定理

应用：1. 利用群的定义进行群的判定
2. 利用交换群的定义和性质进行交换群的判定
3. 利用循环群的性质构造循环群
4. 子群的判定
5. 利用左（右）陪集的定义，掌握左（右）陪集的判别条件

（二）同态（次重点）

识记：群同态定义

理解：群同态的相关定理。

应用：利用群同态的相关性质进行群同态的判定

（三）不变子群、同态满射（一般）。

识记：1. 不变子群定义

2. 同态满射

理解：1. 不变子群相关定理

2. 同态满射相关定理

应用：不变子群的判定

第三章 环与域

一、学习目的与要求

本章在第一、二章的基础上进一步学习具有两个代数运算的代数系统——环和域，介绍环、域、子环、理想、商环、环同态基本定理等内容，并给出域的两种构造方法，将整数环的一些性质推广到一般的整环上等。通过本章的学习，要求考生掌握环和域的基本知识和基本思想方法，为进一步学习打好基础。

二、考核知识点与考核目标

（一）加群、环、整环、除环、域、无零因子环、理想、主理想（重点）

识记：1. 加群、环定义

2. 环的相关概念

3. 整环

4. 除环

5. 域

6. 子环

7. 多项式环

8. 理想

9. 主理想

10. 剩余类环

理解：1. 环的基本性质

2. 除环的基本性质

3. 理想的性质

应用：环、子环、理想、商环、主理想环的判定；掌握主理想中元素的几种表达形式

(二) 环的同态与同构基本定理（次重点）。

识记：环的同态、同构定义

应用：会求给定的环同态的核与像；能简单利用环的同态基本定理及基本性质判断给定的环之间映射是否是环同态

(三) 最大理想、商域（一般）

识记：1. 最大理想

2. 商域

理解：1. 最大理想的相关定理

2. 商域的相关定理

应用：1. 由极大理想构造域

2. 利用商域的结构及性质，构造商域

第四章 整环里的因子分解

一、学习目的与要求

本章介绍素元、唯一分解环、主理想环、欧氏环、多项式环、因子分解基本定理等内容，通过本章的学习，要求考生掌握整环中元素的因子分解的基本知识和基本思想方法，为进一步学习打好基础。

二、考核知识点与考核目标

(一) 唯一分解环、主理想环、欧氏环、多项式环（重点）

识记：1. 唯一分解的定义

2. 唯一分解环的定义

3. 主理想环的定义

4. 欧氏环

理解：1. 唯一分解环相关性质

2. 主理想环的相关性质

3. 欧氏环相关性质

应用：唯一分解环、主理想环、欧氏环、多项式环的判定及生成

(二) 因式分解、多项式的根（次重点）

识记：1. 本原多项式

2. 根、重根、导数的定义

理解：1. 本原多项式相关引理

2. 本原多项式相关定理

3. 根与一次因式的关系

应用：1. 多项式根、重根的判定

- 2. 可约多项式的判定
- (三) 整除、单位、相伴元、素元 (一般)
 - 识记: 1. 整除
 - 2. 相伴元
 - 3. 素元的定义
 - 理解: 素元相关定理
 - 应用: 素元、最大公因子的计算

第五章 扩域

一、学习目的与要求

通过本章内容的学习, 掌握域的基本知识, 特别是掌握域的单扩张的结构, 了解有限域及其应用。

二、考核知识点与考核目标

(一) 扩域、素域、单扩域、代数扩域、有限扩域 (重点)

- 识记: 1. 扩域的定义
- 2. 素域的定义
- 3. 单扩域的定义
- 4. 代数扩域的定义
- 5. 有限扩域、无限扩域定义

- 理解: 1. 域、素域的基本性质
- 2. 单扩域相关定理
- 3. 有限扩域的相关定理

- 应用: 1. 利用扩域和素域的定义以及定理进行扩域和素域的判定
- 2. 利用代数扩域的定义以及定理进行扩域的相关证明和判定

(二) 分裂域、有限域 (次重点)

- 识记: 1. 分裂域的定义
- 2. 有限域的定义
- 理解: 1. 分裂域的性质
- 2. 有限域的性质

- 应用: 1. 利用多项式的分裂域的定义以及定理进行分裂域相关证明和判定
- 2. 有限域的判定

(三) 可离扩域 (一般)

- 识记: 可离扩域定义
- 理解: 可离扩域的相关定理

第三部分 有关说明与实施要求

一、考核的能力层次表述

本大纲在考核目标中,按照“识记”、“理解”、“应用”三个能力层次规定其应达到的能力层次要求。各能力层次为递进等级关系,后者必须建立在前者的基础上,其含义是:

识记:能知道有关的名词、概念、知识的含义,并能正确认识和表述,是低层次的要求。

理解:在识记的基础上,能全面把握基本概念、基本原理、基本方法,能掌握有关概念、原理、方法的区别与联系,是较高层次的要求。

应用:在理解的基础上,能运用基本概念、基本原理、基本方法联系学过的多个知识点分析和解决有关的理论问题和实际问题,是最高层次的要求。

二、教材

指定教材:近世代数基础,张禾瑞,高等教育出版社,1997年版

三、自学方法指导

1. 在开始阅读指定教材某一章之前,先翻阅大纲中有关这一章的考核知识点及对知识点的能力层次要求和考核目标,以便在阅读教材时做到心中有数,有的放矢。
2. 阅读教材时,要逐段细读,逐句推敲,集中精力,吃透每一个知识点,对基本概念必须深刻理解,对基本理论必须彻底弄清,对基本方法必须牢固掌握。
3. 在自学过程中,既要思考问题,也要做好阅读笔记,把教材中的基本概念、原理、方法等加以整理,这可从中加深对问题的认知、理解和记忆,以利于突出重点,并涵盖整个内容,可以不断提高自学能力。
4. 完成书后作业和适当的辅导练习是理解、消化和巩固所学知识,培养分析问题、解决问题及提高能力的重要环节,在做练习之前,应认真阅读教材,按考核目标所要求的不同层次,掌握教材内容,在练习过程中对所学知识进行合理的回顾与发挥,注重理论联系实际和具体问题具体分析,解题时应注意培养逻辑性,针对问题围绕相关知识点进行层次(步骤)分明的论述或推导,明确各层次(步骤)间的逻辑关系。

四、对社会助学的要求

1. 应熟知考试大纲对课程提出的总要求和各章的知识点。
2. 应掌握各知识点要求达到的能力层次,并深刻理解对各知识点的考核目标。
3. 辅导时,应以考试大纲为依据,指定的教材为基础,不要随意增删内容,以免与大纲脱节。
4. 辅导时,应对学习方法进行指导,宜提倡“认真阅读教材,刻苦钻研教材,主动争取帮助,依靠自己学通”的方法。
5. 辅导时,要注意突出重点,对考生提出的问题,不要有问即答,要积极启发引导。

6. 注意对考生能力的培养，特别是自学能力的培养，要引导考生逐步学会独立学习，在自学过程中善于提出问题，分析问题，做出判断，解决问题。
7. 要使考生了解试题的难易与能力层次高低两者不完全是一回事，在各个能力层次中会存在着不同难度的试题。
8. 助学学时：本课程共 6 学分，建议总课时 108 学时，其中助学课时分配如下：

章 次	内 容	学 时
第一章	基本概念	24
第二章	群	28
第三章	环与域	24
第四章	整环中元素的因子分解	16
第五章	扩域	16
合 计		108

五、关于命题考试的若干规定

1. 本大纲各章所提到的内容和考核目标都是考试内容。试题覆盖到章，适当突出重点。
2. 试卷中对不同能力层次的试题比例大致是：“识记”为 30%、“理解”为 30%、“应用”为 40%。
3. 试题难易程度应合理：易、较易、较难、难比例为 2：3：3：2。
4. 每份试卷中，各类考核点所占比例约为：重点占 60%，次重点占 30%，一般占 10%。
5. 试题类型一般分为：单项选择题、填空题、名词解释题、解答题、证明题。
6. 考试采用闭卷笔试，考试时间 150 分钟，采用百分制评分，60 分合格。

六、题型示例（样题）

一、单项选择题（本大题共■小题，每小题■分，共■分）

在每小题列出的四个备选项中只有一个是符合题目要求的，请将其选出并将“答题卡”上的相应字母涂黑。错涂、多涂或未涂均无分。

1. 一个循环群一定是
 A. 交换群 B. 有限群 C. 无限群 D. 与整数加群同构
2. 设 G 是阶为 m 的群， $a \in G$, a 的阶为 n ，则
 A. $n = m$ B. $n | m$ C. $m | n$ D. $n \neq m$

二、填空题（本大题共■小题，每小题■分，共■分）

1. 在以 4 位模剩余类环中 $x^2 - 1 = 0$ 的根为_____。
2. 给出集合 $A = \{a, b, c, d, e\}$ 的一个分类_____。

三、名词解释题（本大题共■小题，每小题■分，共■分）

1. 群
2. 扩域

四、解答题（本大题共■小题，每小题■分，共■分）

1. 设集合 $A = \{1, 2, 3\}$ ， G 是 A 上的置换群， H 是 G 的子群， $H = \{I, (1\ 2)\}$ ，写出 H 的所有陪集。
2. 找出模 6 的剩余类环中的所有理想。

五、证明题（本大题共■小题，每小题■分，共■分）

1. 证明一个 k -循环置换的阶是 k 。
2. 假定 R 是一个整环，那么 R 上的一元多项式环 $R[x]$ 也是一个整环。