2019年4月高等教育自学考试全国统一命题考试

线性代数(经管类)

说明：在本卷中，A^T 表示矩阵 A 的转置矩阵，A^* 表示矩阵 A 的伴随矩阵，E 是单位矩阵，

$|A|$ 表示方阵 A 的行列式，$r(A)$ 表示矩阵 A 的秩.

一、单项选择题：本大题共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的，请将其选出。

1. 设行列式 $\begin{vmatrix} a_1+a_2 & a_2-a_1 \\ b_1+b_2 & b_2-b_1 \end{vmatrix}=-2$，则 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=$（　）。

A. -2
B. -1
C. 1
D. 2

【答案】B

【解析】

$$\begin{vmatrix} a_1+a_2 & a_2-a_1 \\ b_1+b_2 & b_2-b_1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1+a_2 & 2a_2 \\ b_1+b_2 & 2b_2 \end{vmatrix}$$

$$=2\begin{vmatrix} a_1+a_2 & a_2 \\ b_1+b_2 & b_2 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=-2$$

所以：

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=-1$$

2. 设 A 为 2 阶矩阵，将 A 的第 1 行与第 2 行互换得到矩阵 B，再将 B 的第 2 行加到第 1 行得到矩阵 C，则满足 $PA=C$ 的可逆矩阵 $P=$（　）。

A. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

【答案】B

【解析】

两行互换：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

再把第 2 行加到第1行：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. 设向量 $\beta=(2,1,b)^T$ 可由向量组 $\alpha_1=(1,1,1)^T$ ， $\alpha_2=(2,3,a)^T$ 线性表出，则数 a,b 满足关系式（　）。

A. $a-b=4$

B. $a-b=0$

C. $a+b=4$

D. $a+b=0$

【答案】C

【解析】

设 $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$

即 $\begin{cases} 2=k_1+2k_2 \\ 1=k_1+3k_2 \\ b=k_1+ak_2 \end{cases}$

得 $k_1=4, k_2=-1$

所以 $b=4-a$ 即 $a+b=4$

4. 设齐次线性方程组 $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3=0 \\ kx_1+x_2+x_3=0 \\ x_1-x_2+x_3=0 \end{cases}$ 有非零解，则数 $k=$（　）。

A. -2

B. -1

C. 1

D. 2

【答案】D

【解析】

有非零解 $\rightleftarrows$ 系数矩阵行列式等于零：

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ k-2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (k-2)(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$= (2-k)(1+1) = 2(2-k)$

因此 $2-k=0 \to k=2$

5. 设 3 阶实对称矩阵 A 的秩为 2，则 A 的特征值 $\lambda = 0$ 的重数为（ ）。

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

【答案】B

【解析】

由定理，实对称矩阵相似于对角矩阵，相似矩阵特征值相同。又 A 的秩为 2，因此与 A 相似的对角矩阵的秩也为 2，特征值 $\lambda = 0$ 的重数为 1。

二、填空题：本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分。

6.设某 3 阶行列式第 2 行元素分别为 $1,-2,3$，对应的余子式为 $3,2,-2$，则该行列式的值为（ ）。

【答案】-1

【解析】

$1\times3\times(-1)^{2+1}+(-2)\times2\times(-1)^{2+2}+3\times(-2)\times(-1)^{2+3}$

$=-3-4+6=-1$

7. 已知行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$，则 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ a-1 & b+1 & c-1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$（ ）。

【答案】-1

【解析】

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ a-1 & b+1 & c-1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 + \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 + 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2(-1) = -1$$

8. $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}=$（ ）。

【答案】

$$\begin{pmatrix} a_{11}+2a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+2a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+2a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

【解析】

右乘矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$是将矩阵$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$的第三列的 2 倍加到第一列。

9.设n阶矩阵A满足关系式$A^2-A=2E$，则$A^{-1}=$（ ）。

【答案】$\frac{1}{2}(A-E)$

【解析】

$$A^2-A=2E\Rightarrow A(A-E)=2E$$
$$A^{-1}A(A-E)=2A^{-1}\Rightarrow$$
$$\frac{1}{2}(A-E)=A^{-1}$$

10.设向量组$\alpha_1=(1,1,a)^T,\alpha_2=(1,a,1)^T,\alpha_3=(a,1,1)^T$的秩为$2$，则数$a=$（ ）。

【答案】$a=-1$

【解析】

$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$秩为$2$，则$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & a\\1 & a & 1\\a & 1 & 1\end{vmatrix}=(1+a)\begin{vmatrix}1 & 1 & a\\1 & a & 1\\1 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

$$=(1+a)\begin{vmatrix}1 & 1 & a\\0 & a-1 & 1-a\\0 & 0 & 1-a\end{vmatrix}$$

$$=(1+a)\begin{vmatrix}a-1 & 1-a\\0 & 1-a\end{vmatrix}$$

$$=(1+a)(a-1)(1-a)$$

$$=-(1+a)(a-1)^2$$

当 $a=1$ 时，向量组 $\alpha_1=(1,1,a)^T,\alpha_2=(1,a,1)^T,\alpha_3=(a,1,1)^T$ 的秩为 1.

所以 $a=-1$

11.与向量 $\alpha_1=(2,-1)^T$ 正交的单位向量 $\alpha_2=$（　）。

【答案】$\alpha_2=(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}})$

【解析】

设 $\beta=(a,b)$ 与 $\alpha_1=(2,-1)^T$ 正交，那么 $\beta\alpha_1=0$ 即

$(a,b)(2,-1)^T=0\Rightarrow 2a-b=0\Rightarrow 2a=b$

β 可取 $\beta=(2,1)$，将 β 单位化得 $\alpha_2=\frac{1}{\sqrt{5}}\beta=\frac{1}{\sqrt{5}}(2,1)=(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}})$

12. 设 4 元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的增广矩阵经初等行变换化为

$$(A,b)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -1 & 0 & 1 & 0\\0 & 2 & -1 & 3 & -1\\0 & 0 & a-2 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & a-2 & 0\end{array}\right)$$

若该线性方程组有唯一解，则数 a 的取值应满足（　）。

【答案】$a\neq 2$

【解析】

当 $a\neq 2$ 时，系数矩阵满秩， 线性方程组有唯一解。

13. 设 A 为 n 阶矩阵，若非齐次线性方程组 $Ax=b$ 有无穷多解，则 $|A|=$（　）。

【答案】0

【解析】只有当 $|A|=0$ 时，非齐次线性方程组 $Ax=b$ 无解或有无穷多解。

因此若非齐次线性方程组 $Ax=b$ 有无穷多解，则 $|A|=0$。

14. 设 A 为 n 阶矩阵，且满足 $|3A+2E|=0$，则 A 必有一个特征值为（   ）。

【答案】$-\dfrac{2}{3}$

【解析】$|3A+2E|=0 \Rightarrow \left|\dfrac{2}{3}E+A\right|=0 \Rightarrow \left|-\dfrac{2}{3}E-A\right|=0$

所以 A 必有一个特征值为 $-\dfrac{2}{3}$

15.二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2)^2-(x_2+x_3)^2$ 的矩阵 $A=$（   ）。

【答案】$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

【解析】$\begin{aligned} & f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2)^2-(x_2+x_3)^2 \\ & =x_1^2-2x_1x_2-2x_2x_3-x_3^2 \end{aligned}$

所以对应的矩阵为：

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

三、计算题：本大题共 7 小题，每小题 9 分，共 63 分。

16 .计算 4 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

【答案】8

【解析】

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}=(-1)\times 2\times(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=(-2)(-4)=8$$

17.设向量 $\alpha=(2,1,3)^T,\beta=(-1,1,1)^T,A=\alpha\beta^T$，求 A 和 A^5。

【答案】见解析

【解析】

$$A=\alpha\beta^T=\begin{pmatrix}-2&2&2\\-1&1&1\\-3&3&3\end{pmatrix}，\ \beta^T\alpha=-2+1+3=2$$

$$A^5=\alpha\beta^T\alpha\beta^T\alpha\beta^T\alpha\beta^T\alpha\beta^T$$
$$=\alpha(\beta^T\alpha)(\beta^T\alpha)(\beta^T\alpha)(\beta^T\alpha)\beta^T$$
$$=\alpha\times2^4\times\beta^T=2^4\alpha\beta^T$$
$$=\begin{pmatrix}-2^5&2^5&2^5\\-2^4&2^4&2^4\\-3\cdot2^4&3\cdot2^4&3\cdot2^4\end{pmatrix}$$

18.设矩阵 A,B 满足关系式 $X=XA+B$，其中 $A=\begin{pmatrix}0&-2&0\\-1&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&2&5\\-1&0&3\end{pmatrix}$，求矩阵 X。

【答案】$X=\begin{pmatrix}1&0&-5\\1&-2&-3\end{pmatrix}$

【解析】$X=XA+B\Rightarrow X-XA=B\Rightarrow X(E-A)=B$

$$X=B(E-A)^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&5\\-1&0&3\end{pmatrix}\left(E-\begin{pmatrix}0&-2&0\\-1&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}\right)^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&5\\-1&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&0\\1&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}^{-1}$$

先求$\begin{pmatrix}1&2&0\\1&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}^{-1}$，

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&2&0\\0&1&0&1&1&0\\0&0&1&0&0&-1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&2&0\\-1&1&0&0&-1&0\\0&0&-1&0&0&1\end{array}\right)\to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&2&0\\1&-1&0&0&1&0\\0&0&-1&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1&2&0&1&0&0\\1&-1&0&0&1&0\\0&0&-1&0&0&1\end{array}\right)$$

从而$\begin{pmatrix}1&2&0\\1&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-1&2&0\\1&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$

$$X=\begin{pmatrix}1&2&5\\-1&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&0\\1&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&5\\-1&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&2&0\\1&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&-5\\1&-2&-3\end{pmatrix}$$

19.求矩阵$A=\begin{pmatrix}2&1&1&-1\\1&0&1&-2\\-3&-2&-1&0\\1&3&-2&7\end{pmatrix}$的秩和列向量组的一个极大线性无关组，并将其余列向量由该极大无关组线性表出。

【答案】见解析

【解析】

对矩阵A做初等列变换：

$$\begin{pmatrix}2&1&1&-1\\1&0&1&-2\\-3&-2&-1&0\\1&3&-2&7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&1&0&0\\1&0&1&-2\\-3&-2&1&-2\\1&3&-5&10\end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix}1&1&0&0\\\frac{1}{2}&0&1&-2\\-\frac{3}{2}&-2&1&-2\\\frac{1}{2}&3&-5&10\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&1&-2\\-\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}&1&-2\\\frac{1}{2}&\frac{5}{2}&-5&10\end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & -2 \\ -\frac{3}{2} & 1 & 1 & -2 \\ \frac{1}{2} & -5 & -5 & 10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由此可以看出矩阵 A 的秩为 2 。

记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$

其中 $\alpha_1=\left(2,1,-3,1\right)^T$， $\alpha_2=\left(1,0,-2,3\right)^T$，

$\alpha_3=\left(1,1,-1,-2\right)^T$， $\alpha_4=\left(-1,-2,0,7\right)^T$

由上面对矩阵 A 做初等列变换的结果可以看到，(α_1,α_2) 为列向量组的一个极大线性无关组。

设 $\alpha_3=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$， $\alpha_4=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2$

$$\begin{cases} 1=2k_1+k_2 \\ 1=k_1 \\ -1=-3k_1+-2k_2 \\ -2=k_1+3k_2 \end{cases}$$ 得 $k_1=1,k_2=-1$，即 $\alpha_3=\alpha_1-\alpha_2$

$$\begin{cases} -1=2l_1+l_2 \\ -2=l_1 \\ 0=-3l_1+-2l_2 \\ 7=l_1+3l_2 \end{cases}$$ 得 $l_1=-2,l_2=3$，即 $\alpha_4=-2\alpha_1+3\alpha_2$

20.设线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_3=1 \\ -x_1+x_2-x_3=-2 \\ 2x_1-x_2+(a+2)x_3=3 \\ x_1+x_2+3x_3=b \end{cases}$$

确定数 a,b 为何值时，方程组有无穷多解，并求出其通解（要求用其一个特解和导出组的基础解系表示）。

【答案】见解析

【解析】

系数矩阵的增广矩阵：

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & a+2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & b \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & a-4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & a-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{array}\right)$$

因此，若 $b-1\neq 0, b\neq 1$，则方程组无解。因此 $b=1$。

当 $a\neq 2$ 时，方程组有唯一解，因此 $a=2$。

因此 $a=2, b=1$。

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & a-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

对应的方程组为：

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 = 1 \\ x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

即：

$$\begin{cases} x_1 = 1 - 3x_3 \\ x_2 = -1 - 2x_3 \end{cases}$$

特解：$\eta_0 = (x_1, x_2, x_3) = (-2, -3, 1)$

导出组的基础解系：$\begin{cases} x_1 = -3x_3 \\ x_2 = -2x_3 \end{cases}$ 即 $\xi = (-3x_1, -2x_2, x_3)$

通解：$\eta = \eta_0 + \xi$

21.设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，判定 A 是否可对角化，若可以，求可逆矩阵 P 和对角矩阵 Λ，

使得 $P^{-1}AP = \Lambda$。

【答案】见解析
【解析】

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda & 0 & -1\\ 0 & \lambda+1 & 0\\ -3 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=$$

$$(\lambda+1)\begin{vmatrix}\lambda & -1\\ -3 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda+1)[\lambda(\lambda-2)-3]$$

$$=(\lambda+1)^2(\lambda-3)$$

A有两个特征值$\lambda_{1,2}=-1$（二重），$\lambda_3=3$

用来求特征向量的齐次线性方程组为：

$$\begin{pmatrix}\lambda & 0 & -1\\ 0 & \lambda+1 & 0\\ -3 & 0 & \lambda-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0$$

属于特征值$\lambda_{1,2}=-1$的特征向量$p=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$满足：

$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ -3 & 0 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0$$

可取两个线性无关的解$p_1=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$，$p_2=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$

属于特征值$\lambda_3=3$的特征向量$p=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$满足：

$$\begin{pmatrix}3 & 0 & -1\\ 0 & 4 & 0\\ -3 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0$$

可取$p_3=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 3\end{pmatrix}$

于是找到可逆矩阵 $P=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\-1&-1&3\end{pmatrix}$ 使得 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$

22.求正交变换 $x=Qy$，将二次型 $f=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+4x_2x_3$ 化为标准形。

【答案】见解析

【解析】

二次型 $f=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+4x_2x_3$ 的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{pmatrix}$

先求 A 的特征值：

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&0\\0&\lambda-3&-2\\0&-2&\lambda-3\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-3&-2\\-2&\lambda-3\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)\left((\lambda-3)^2-4\right)$$

$$=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-5)$$

A 的 3 个特征值：$\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=5$

属于特征值 $\lambda_1=1$ 的特征向量 $p_1=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ 满足：

$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-2&-2\\0&-2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$，可取 $p_1=\begin{pmatrix}0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$

属于特征值 $\lambda_2=2$ 的特征向量 $p_2=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ 满足：

$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&-2\\0&-2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$，可取 $p_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

属于特征值 $\lambda_3=5$ 的特征向量 $p_3=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ 满足：

$$\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&-2\\0&-2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$$，可取 $p_3=\begin{pmatrix}0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$

于是找到正交矩阵 $Q=\begin{pmatrix}0&1&0\\\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$

经过正交变换 $x=Qy$，原二次型化为标准形 $y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$。

四、证明题：本题 7 分。

23.已知向量 β 可由向量组 α_1,α_2 线性表出。证明：如果表示法惟一，则 α_1,α_2 线性无关。

【答案】见解析

【解析】

反证法：

由已知可设 $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$，假设 α_1,α_2 线性相关，即存在不全为 0 的数 l_1,l_2 使得 $l_1\alpha_1+l_2\alpha_2=0$，那么 β 也可以表示为 $\beta=(k_1+l_1)\alpha_1+(k_2+l_2)\alpha_2$，得出表示法不惟一。

从而如果表示法惟一，则 α_1,α_2 线性无关。